

Ad-Soyad:

14.06.2019

Numara:

İmza:

SOYUT MATEMATİK II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

- 1) Her tam sayısının, iki pozitif tamsayının farkı olarak yazılabileceğini gösteriniz.
- 2) $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = 1$ ise $(3x - y, 3x + y) = d$ sağlayan d sayısını bulunuz.
- 3) α, β, γ kesimler olmak üzere $\alpha < \beta, \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ olur mu? Gösteriniz.
- 4) $x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \leq y \leq x^+ \Rightarrow x = y$ ya da $y = x^+$ olduğunu gösteriniz.
- 5) Her $n \in \mathbb{N}$ için $n\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}$ kümesinin sayılabilir bir küme olup olmadığını gösteriniz.

CEVAPLAR

BAŞARILAR

1) $x = [a, b] \in \mathbb{Z}$ alalım.

$\forall c, d \in \mathbb{N}$ için $[a, b] = [a+c, c] + [d, b+d]$ dir.

$$y = [a+c, c] > 0$$

$$z = [b+d, d] > 0$$

olarak alınırsa $x = y - z$ elde edilir.

2) $(x, y) = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} \ni xa + yb = 1$

$$xa + yb = 1 \Rightarrow 6xa + 6yb = 6$$

$$(3x - y, 3x + y) = d \Rightarrow d \mid 3x - y, d \mid 3x + y$$

$$\Rightarrow d \mid 6x, d \mid 2y$$

$$\Rightarrow d \mid 6x, d \mid 6y$$

$$\left. \begin{array}{l} d|6x \\ d|6y \end{array} \right\} \Rightarrow d|6xa, d|6yb$$

$$\Rightarrow d|6xa+6yb$$

$$\Rightarrow d|6 \xrightarrow{d>0} d=1 \vee 2 \vee 3 \vee 6$$

3) $\alpha < \beta$ olduğu için $p \in \beta$, $p \notin \alpha$ olacak biçimde bir $p \in \mathcal{A}$ sayısı, $\beta < \gamma$ olduğu için $q \in \gamma$, $q \notin \beta$ olacak biçimde bir $q \in \mathcal{A}$ sayısı vardır.

$$p \in \beta \text{ ve } q \notin \beta \Rightarrow p < q$$

$$p \notin \alpha \text{ ve } p < q \Rightarrow q \notin \alpha$$

$$q \in \gamma \text{ ve } q \notin \alpha \Rightarrow \alpha < \gamma$$

4) $x \neq y$ olsun

$$\Rightarrow x < y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ni y = x + k$$

$$k=1 \text{ ise } y = x+1 \Rightarrow y = x^+$$

$k \neq 1$ olsun.

$$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}^* \ni k = s^+$$

$$y = x + k = x + s^+$$

$$= (x+s)^+$$

$$= (s+x)^+ = s + x^+$$

$$\Rightarrow x^+ < y \text{ (çelişki, } y \leq x^+ \text{ idi)}$$

$\therefore k \neq 1$ olamaz.

$$\Rightarrow k=1$$

$$\therefore y = x^+$$

$$5) \quad n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}, \quad n\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = n\mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = \{nz : z > 0\} \\ B = \{nz : z < 0\} \end{array} \right\} \Rightarrow n\mathbb{Z} = A \cup B \cup \{0\}$$

A sayılabilir mi?

$$f: A \longrightarrow C \subseteq \mathbb{N}$$

$$nz \longmapsto f(nz) = z$$

$$\bullet \quad \forall x, y \in A \text{ iken } \Rightarrow \exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \ni x = nz_1, y = nz_2$$

$$(z_1 > 0, z_2 > 0)$$

$$\bullet \quad x = y \Rightarrow nz_1 = nz_2 \Rightarrow n(z_1 - z_2) = 0,$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y)$$

$\therefore f$ iyi tanımlıdır.

$$\bullet \quad f(x) = f(y) \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow nz_1 = nz_2$$

$$\Rightarrow x = y$$

$\therefore f$ 1-1 dir.

$\bullet f$ örtendir.

$\therefore A$ sayılabilir bir kümedir.

Benzer şekilde, $g: B \longrightarrow D \subseteq \mathbb{N}$, $g(nz) = -z$ olacak şekilde alırsa B sayılabilir bir küme olur.

Sayılabılır kümelerin birleşimi sayılabilir olduğundan $n\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}$ sayılabilir dir.